E.N.S.E.T. 1985

Section A_1 — Math II

Durée : 4 heures

Les parties I *et* II A *sont entièrement indépendantes.*

I

Soient E et F deux espaces vectoriels réels de dimension finie. On note E^* l'espace vectoriel des formes linéaires sur E et $L(E^*, F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires de E^* dans F. Si x est un élément de E et y un élément de F, on note $x \otimes y$ l'élément de $L(E^*, F)$ défini par $(x \otimes y)(\varphi) = (\varphi(x))(y)$ pour tout φ dans E^*.

1° Montrer que $L(E^*, F)$ admet pour base $(e_i \otimes f_j)_{(i,j) \in I \times J}$, où $(e_i)_{i \in I}$ est une base de E et $(f_j)_{j \in J}$ est une base de F.

Est-ce que tout élément de $L(E^*, F)$ est de la forme $x \otimes y$?

2° Montrer que $u : (x, y) \longmapsto x \otimes y$ définit une application bilinéaire de $E \times F$ dans $L(E^*, F)$.

Montrer que pour toute forme bilinéaire g sur $E \times F$, il existe une unique forme linéaire g' sur $L(E^*, F)$ telle que $g = g' \circ u$.

3° Soient α et β deux formes quadratiques sur E et F respectivement. Montrer qu'il existe une unique forme quadratique ψ sur $L(E^*, F)$ telle que $\psi(x \otimes y) = \alpha(x)\beta(y)$ pour tous x de E et y de F et telle que sa forme polaire ψ°, c'est-à-dire la forme bilinéaire symétrique associée à ψ, vérifie $\psi^\circ(x \otimes y, x' \otimes y') = \psi^\circ(x \otimes y', x' \otimes y)$ pour tous x, x' de E et y, y' de F.

(On pourra démontrer que pour une telle forme ψ :

$$\psi^\circ(x \otimes y, x' \otimes y') = \alpha^\circ(x, x')\beta^\circ(y, y')$$

où α° et β° sont les formes polaires de α et β.)

4° Préciser le rang et la signature de ψ à partir de ceux de α et β.

II

On se propose de voir s'il existe une matrice $(m_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ symétrique à n lignes (avec $n > 0$) dont tous les coefficients valent 0 ou 1, dont les coefficients diagonaux sont nuls, et vérifiant les relations :

$$\Sigma_{1 \leqslant j \leqslant n}\, m_{ij}\, m_{ij} = 9 \quad \text{pour tout } i \text{ de } \{1, \ldots, n\}$$
$$\Sigma_{1 \leqslant j \leqslant n}\, m_{ij}\, m_{kj} = 0 \quad \text{si } m_{ik} = 1$$
$$\Sigma_{1 \leqslant j \leqslant n}\, m_{ij}\, m_{kj} = 4 \quad \text{si } m_{ik} = 0 \text{ et } i \neq k.$$

On suppose qu'une telle matrice M existe.

On note I la matrice unité à n lignes, et J la matrice carrée à n lignes dont tous les coefficients valent 1.

A

1° Quelles sont les valeurs propres de J et les dimensions des espaces propres correspondants?

2° Exprimer MJ, JM, J^2, M^2 comme combinaisons linéaires de I, J, M.

Démontrer que le noyau de $M - 9I$ est l'image de J et que $n = 28$.

3° Donner un polynôme $P = X^3 + a_2 X^2 + a_1 X + a_0$ à coefficients réels tel que $M^3 + a_2 M^2 + a_1 M + a_0 I = 0$. Quelles sont les racines de P ?

4° Montrer que les racines de P sont les valeurs propres de M en donnant les dimensions des espaces propres correspondants (on pourra utiliser la trace de M, c'est-à-dire la somme de ses éléments diagonaux).

B

Soit E l'espace vectoriel des matrices colonnes à $n = 28$ coordonnées avec sa base canonique $e_1, \ldots, e_n$ où e_i est la colonne dont la $i^{ème}$ coordonnée vaut 1 et les autres 0.

On considère la forme quadratique α sur E définie par :

$$\alpha(x) = {}^t x (M^2 - 10M + 9I)\, x,$$

où ${}^t x$ est la matrice ligne transposée de x.

1° Quelle est la signature de α ? et celle de ψ obtenue au I.3° avec $E = F$ et $\beta = \alpha$?

En déduire que la restriction δ de ψ au sous-espace vectoriel G engendré par les vecteurs $e_i \otimes e_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, est une forme positive.

2° Montrer que la matrice de δ dans la base $(e_i \otimes e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de G est combinaison linéaire de M, I, J ; déterminer ses valeurs propres.

3° Que peut-on conclure des résultats des deux questions précédentes ?